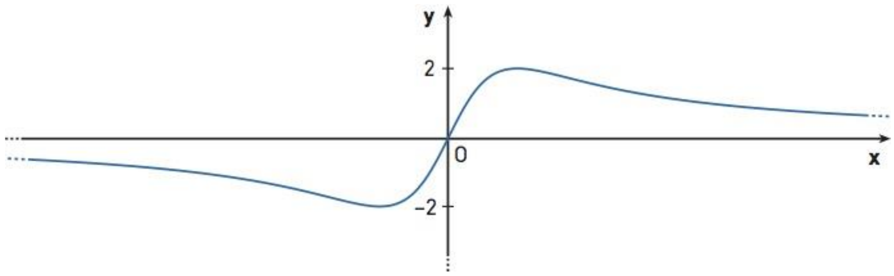
LICEO STATALE "NICCOLÒ MACHIAVELLI"
www.liceomachiavelli-firenze.gov.it
Liceo Classico, Liceo Internazionale Linguistico,
Liceo Internazionale Scientifico
Liceo delle Scienze Umane, Liceo Economico-Sociale
Uffici Amministrativi: Via Santo Spirito, 39 – 50125 Firenze
tel. 055-2396302 - fax 055-219178
e-mail: liceomachiavelli.firenze@gmail.com - PEC:
fiis00100r@pec.istruzione.it

Problema 1

Nella figura è rappresentato in modo qualitativo il grafico cartesiano di una funzione reale $f(x)$, definita, continua e derivabile in R, e di cui si sa che:

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$;
- è simmetrica rispetto all'origine O del riferimento;
- ammette un solo massimo relativo e un solo minimo relativo.



a) Stabilisci, motivando la risposta, a quale tra le seguenti famiglie di funzioni può appartenere $f(x)$:

$$f_1(x) = \frac{ax}{1+b^2x^2}, \qquad f_2(x) = bxe^{ax^2}, \qquad \text{con } a,b \in R^+.$$

b) Dopo aver dimostrato che $f(x)$ è del tipo $f_1(x)$, determina i rispettivi valori di a e b per i quali sono soddisfatte le seguenti condizioni:
- $f(x)$ presenti il massimo relativo in corrispondenza di $x = 2$
- il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $f(x)$ nell'origine sia 2.

c) Stabilito che i valori di a e b richiesti nel punto precedente sono di $a = 2$ e $b = \frac{1}{2}$, sia $f(x)$ la funzione corrispondente. Calcola l'area della regione finita del piano delimitata dal grafico della funzione e dalle rette tangenti al grafico nell'origine O e nel punto di massimo M.

d) Supponi che, per di $x \geq 0$, x rappresenti il tempo (in secondi) e $f(x)$ la velocità istantanea (in m/s) di un punto in moto rettilineo. In quali intervalli di tempo l'accelerazione istantanea è positiva, in quali è negativa, e in quali istanti è nulla? Qual è la distanza complessivamente percorsa dal punto rispetto all'origine nell'intervallo di tempo compreso tra di $x = 0$ e di $x = T$? Tale distanza ha un limite superiore o cresce indefinitamente al crescere del tempo T? Motiva la risposta.

Problema 2

La rotazione intorno all'asse x dei grafici della famiglia di funzioni:

$f_k(x) = \frac{x}{4k}\sqrt{k^2 - x}$, con $x \in R$, $0 \leq x \leq k^2$, $k \in R$, $k > 0$

genera dei solidi di rotazione di forma aerodinamica.

a) In un riferimento cartesiano *Oxy*, traccia i grafici delle funzioni $f_k(x)$, per $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ e determina il valore di k per il quale il volume del solido di rotazione assume il valore $\frac{64\,\pi}{192}$;

b) calcola il diametro massimo dei solidi di rotazione in funzione di k, e determina il valore dell'angolo formato dalla tangente al grafico di f_k con l'asse x per $x = 0$;

c) assumendo che la distribuzione della massa sia omogenea, il baricentro del corpo di rotazione si trova sull'asse x, per ragioni di simmetria. Determina l'ascissa x_S del baricentro in funzione del parametro k, sapendo che vale:

$$x_S = \frac{\pi \int_a^b x\,[f_k(x)^2]\,dx}{V}$$

dove gli estremi di integrazione *a* e *b* vanno scelti opportunamente, e *V* indica il volume del solido di rotazione;

d) all'interno del solido di rotazione generato da f_k, per $k = 3$, si vorrebbe collocare un cilindro di raggio 0,5 e di altezza 6. Verifica se ciò è possibile, motivando la tua risposta.

Questionario

1. Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

si studi la continuità di $f'(x)$.

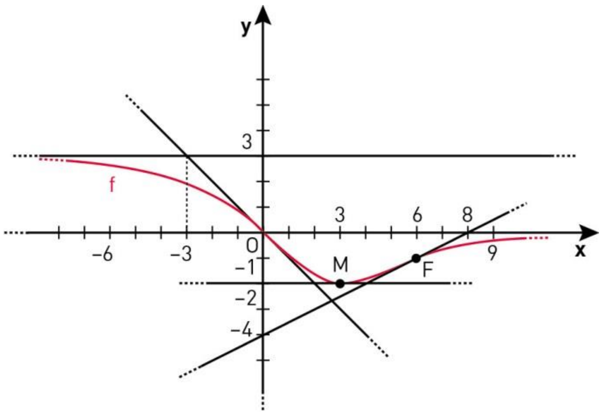
2. Si determinino quali condizioni devono soddisfare i due parametri reali a e b, con di $a > 0$, affinché la seguente funzione verifichi le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $\left[\frac{a}{2}; b\right]$, analizzando separatamente i casi di $b \leq a$ e $b > a$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-2a} & \text{se } x \leq a \\ -\dfrac{x}{a} & \text{se } x > a \end{cases}.$$

3. Si determini il dominio della funzione:

$$y=\sqrt{\frac{\ln(x-2)}{\ln x-2}}\,.$$

4. La seguente figura rappresenta il grafico di una funzione f e le sue tangenti nei punti $O\ (0,0)$, $M(3,-2)$, $F\ (6,-1)$. La funzione è continua e derivabile almeno due volte in **R** e ha due flessi in O, e F. Si disegni un grafico probabile della derivata prima dando adeguata giustificazione, indicando in particolare le coordinate dei suoi punti di massimo e minimo relativi.



5. Senza fare uso del teorema di De L'Hospital, si calcoli:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{e^{\pi}-e^{x}}\,.$$

6. Una scatola contiene palline bianche e palline nere per un totale di 100 palline. Sapendo che estraendone due la probabilità che siano dello stesso colore è uguale alla probabilità che siano di colore diverso, si determini il numero di palline di ciascun colore.

7. Una vasca cubica di 2 m per lato contiene inizialmente 2 m^3 d'acqua. A un istante $t=0$ si apre un rubinetto che immette acqua nella vasca al ritmo costante di 10 m^3 all'ora e nello stesso istante si apre lo scarico della vasca. Sapendo che l'acqua defluita dallo scarico dopo t ore è pari a $t\,(10-\ e^{1-t})$ m^3, qual è il massimo livello raggiunto dall'acqua nella vasca? La vasca finirà per svuotarsi?

8. E' data la funzione definita dall'integrale:

$$F(x)=\int_{x}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{t}{\left(\operatorname{arcsen} t^{2}\right)^{2}+1}\,dt\,.$$

Si individui il dominio della funzione integranda e si dimostri che tale funzione è dispari. Si determini inoltre l'equazione della retta tangente al grafico di $F(x)$ nel punto di ascissa $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.